អារម្ភកថា

ជាទូទៅអ្នកសិក្សាជាពិសេសសិស្សានុសិស្សគ្រប់មជ្ឈដ្ឋាន ភាគច្រើនមានផ្នត់គំនិតគិតថាមុខវិជ្ជា **គណិតវិទ្យា** ជាមុខវិជ្ជាមួយដែលមានភាពស្មុគស្មាញ និងពិបាកក្នុងការចាប់យកចំណេះដឹង។ ជាក់ស្ដែងមុខវិជ្ជានេះ ជាមុខវិជ្ជាវិទ្យាសាស្ត្រមួយដែលមានឥទ្ធិពលជាងគេ ដូចនេះវាពិតណាស់ថាពិបាកក្នុងការរៀន តែផ្ទុយទៅវិញបើសិនជាអ្នកសិក្សាបានចំណាយពេលនៅជាមួយគណិតវិទ្យាឱ្យបានគ្រប់គ្រាន់ក្នុងការគិតលើខ្លឹមសារ និងអនុវត្តលើលំហាត់បានគ្រប់គ្រាន់ វានឹងមានភាពងាយស្រួលសម្រាប់អ្នកទៅលើអ្វីដែលអ្នកបានសិក្សា។ ដើម្បីជាជំនួយក្នុងការស្វ័យសិក្សា អ្នកសិក្សាគប្បីមានឯកសារគ្រប់គ្រាន់ ប៉ុន្តែខ្ញុំយល់ឃើញថាឯកសារគណិតវិទ្យាជាភាសាជាតិមានចំនួនតិចតួចដែលជាការពិបាកសម្រាប់អ្នកសិក្សា ជាហេតុដែលធ្វើឱ្យសៀវភៅមួយក្បាលនេះមានវត្តមានឡើង។

សៀវភៅ **ស្វីត** សម្រាប់ថ្នាក់ទី **១១** នេះ គឺត្រូវបានរៀបចំឡើងដោយផ្សាភ្ជាប់ជាមួយមេរៀនក្នុងជំពូកទីមួយនៃសៀវភៅគណិតវិទ្យាសិក្សាគោល ស្របតាមកម្មវិធីក្រសួងអប់រំ ដោយមានភាពក្បោះក្បាយក្នុងការពន្យល់, ឧទាហរណ៍គ្រប់ចំណុច, ដំណោះស្រាយគ្រប់លំហាត់ប្រតិបត្តិ គ្រប់លំហាត់បញ្ចប់មេរៀនជាដើម។ លើសពីនេះទៅទៀត សៀវភៅនេះមានបញ្ចូលនូវចំណុចសំខាន់ៗដែលទាក់ទងនឹងមេរៀនមកបន្ថែម និង លំហាត់សម្រាប់វាស់ស្ទង់សមត្ថភាពអ្នកសិក្សាផងដែរ ជាហេតុនាំឱ្យសិស្សានុសិស្សងាយទទួលបានចំណេះដឹងពីសៀវភៅមួយក្បាលនេះ។

ក្នុងនាមជាអ្នករៀបរៀង និងនិពន្ធ ខ្ញុំបាទនឹងរង់ចាំនូវការរិះគន់គ្រប់មជ្ឈដ្ឋានអ្នកសិក្សាជានិច្ចដើម្បីកែលម្អឱ្យកាន់តែល្អប្រសើរបន្ថែមទៀត។ ខ្ញុំជឿជាក់ថាសៀវភៅនេះនៅតែមានកំហុសកើតមានឡើងត្រង់ចំណុចណាមួយ ហេតុនេះហើយខ្ញុំសូមអភ័យទោសទុកជាមុនរាល់កំហុស ទាំងអស់ដែលកើតឡើង។ ប្រសិនបើមិត្តអ្នកអាន រកឃើញនូវកំហុសក្នុងសៀវភៅនេះ សូមទំនាក់ទំនងមកកាន់ខ្ញុំបាទតាមរយៈ

Facebook Account: Phan Kimsia

Gmail: phankimsie03@gmail.com

ញូដេលី ឥណ្ឌា, ថ្ងៃទី ១៤ ខែ កុម្ភៈ ឆ្នាំ ២០២៣

Sie

ផាន់ គឹមសៀ

សំណូមពររបស់អ្នករៀបរៀងទៅកាន់មជ្ឈដ្ឋានអ្នកសិក្សា

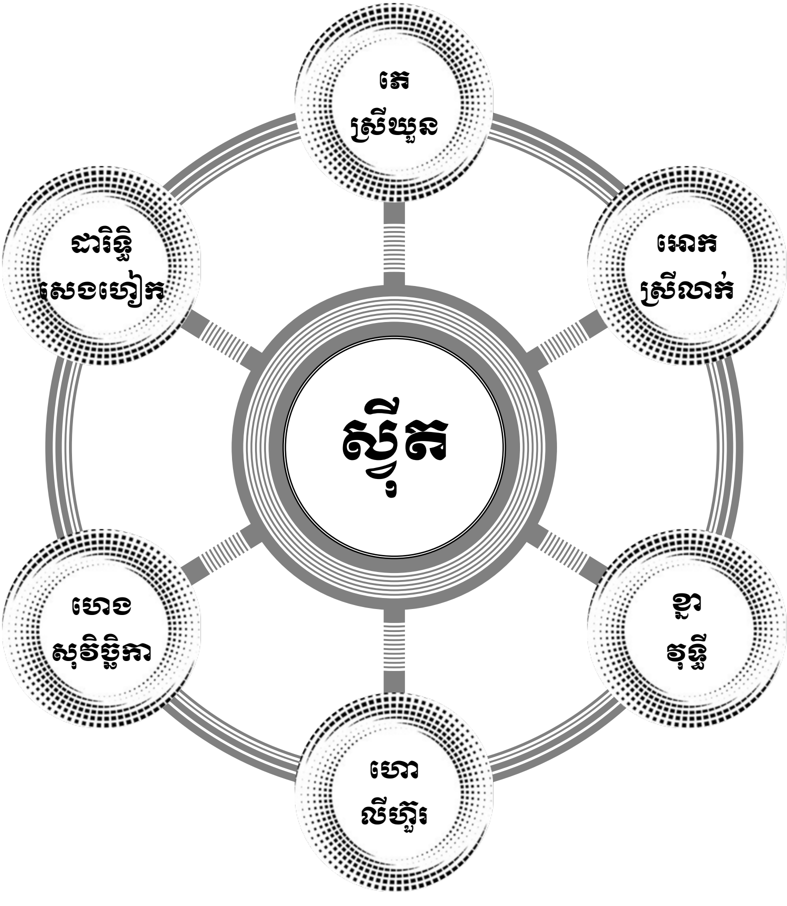
ការស្រាវជ្រាវឯកសារបន្ថែម ពិតជាមានសារៈសំខាន់ណាស់សម្រាប់ការអភិវឌ្ឍសមត្ថភាពខ្លួន ក្នុង ផ្នែកណាៗទាំងអស់។ ហេតុនេះហើយខ្ញុំបាទសូមលើកទឹកចិត្តដល់ប្អូនសិស្សានុសិស្ស និស្សិត និងលោកគ្រូអ្នកគ្រូទាំងអស់ខិតខំប្រឹងប្រែងស្រាវជ្រាវបន្ថែម ព្រមទាំងបង្កើតឯកសារល្អៗសម្រាប់ប្រទេសជាតិយើង។ ដូចទស្សនៈមួយបានសម្តែងថា ទូកទៅកំពង់នៅ ដែលមានន័យថា មនុស្សស្លាប់តែស្នាដៃ ដែលមនុស្សខំសាងគឺមានជីវិតជារៀងរហូត។

ការប្រឹងប្រែងចងក្រងឯកសារជាភាសាជាតិ ជាបុព្វហេតុមួយយ៉ាងសំខាន់ដែលធ្វើឱ្យមនុស្សជំនាន់ក្រោយមានភាពសម្បូរបែបក្នុងការសិក្សា ហើយពួកគេនឹងអាចស្រាវជ្រាវចំណេះដឹងទៅមុខទៀតបានឆ្ងាយ។ សំណៅឯកសារដែលពួកគេបានបន្សល់ទុកទៀតសោតនឹង បន្តជះឥទ្ធិពលបែបនេះជាបន្តបន្ទាប់ រហូតទៅដល់ចំណុចអភិវឌ្ឍអស្ចារ្យមួយ។

ទទួលសិទ្ធិលក់ផ្តាច់មុខដោយ Math Team Kh

Facebook Page: Math Team Kh

គណៈកម្មការ ត្រួតពិនិត្យ



Designed Cover by: ង៉ុន ឆាលី

រៀបរៀងដោយៈ ផាន់ គឹមសៀ

មាតិកា

The only way to learn mathematics
is to do mathematics!
~Paul Halmos

និមិត្តសញ្ញាគណិតវិទ្យា

$(\ )$	:	វង់ក្រចក
$[\ ]$	:	ឃ្នាប ឬដង្កៀប
$\{\ \}$	:	របាំង ឬសំណុំ
$\lvert\ \rvert$	:	តម្លៃដាច់ខាត ឬប្រវែង
$\wedge$	:	ឈ្នាប់និង
$\vee$	:	ឈ្នាប់ឬ
$\bar{}$ or $\neg$	:	ឈ្នាប់មិន
$\Longrightarrow$	:	ឈ្នាប់នាំឱ្យ
$\Longleftrightarrow$	:	ឈ្នាប់សមមូល
ត.(A)	:	តម្លៃភាពពិតនៃសំណើ A
$[a,b]$	:	ចន្លោះបិទ
(a,b)	:	ចន្លោះបើក
$(a,b]$	:	ចន្លោះកន្លះបើកខាងឆ្វេង
$[a,b)$	:	ចន្លោះកន្លះបើកខាងស្តាំ
$\forall$	:	ចំពោះគ្រប់
$\exists$	:	មាន
$\nexists$	:	មិនមាន
$\because$	:	ពីព្រោះ
$\therefore$	:	ដូចនេះ
$:$ or $\mid$	:	ដែល
$\approx$	:	ប្រហែល
$\equiv$	:	សមមូល

$\in$	:	របស់
$\notin$	:	មិនរបស់
$\mathbb{N}$	:	សំណុំចំនួនគត់ធម្មជាតិ
$\mathbb{W}$	:	សំណុំចំនួនគត់
$\mathbb{Z}$	:	សំណុំចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប
$\mathbb{Z}^+$	:	សំណុំចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបវិជ្ជមាន
$\mathbb{Q}$	:	សំណុំចំនួនសនិទាន
$\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$	:	សំណុំចំនួនអសនិទាន
$\mathbb{R}$	:	សំណុំចំនួនពិត
$\mathbb{C}$	:	សំណុំចំនួនកុំផ្លិច
$A=\{a,b\}$	:	សំណុំ A ដែលមានធាតុ a, b
$\overline{A}$ or A^C	:	សំណុំរងបំពេញនៃសំណុំ A
$P(A)$	:	សំណុំស្វ័យគុណនៃសំណុំ A
$\varnothing$	:	សំណុំទទេ
$n(A)$	:	ចំនួនធាតុនៃសំណុំ A
$\subset$	:	នៅក្នុង
$\subseteq$	:	នៅក្នុងឬស្មើ
$\not\subset$	:	មិននៅក្នុង
$\not\subseteq$	:	មិននៅក្នុងឬមិនស្មើ
$\cup$	:	ប្រជុំ
$\cap$	:	ប្រសព្វ
$A\setminus B$	:	ផលសងនៃសំណុំ A និង B

១ ស្វ៊ីតចំនួនពិត

Education is the most powerful weapon we can use to change the world.
~ NELSON MANDELA

១.១ សេចក្តីផ្តើម

នៅពេលយើងអាចយល់ច្បាស់ពីសំណុំ នោះយើងក៏អាចឈានដល់ការស្វែងយល់ពីសេចក្តីផ្តើមរបស់ស្វ៊ីតផងដែរ។ ក្រឡេកទៅថ្នាក់ទី ១០ យើងបានដឹងថាហើយថា **សំណុំ** ជាបណ្តុំនៃធាតុ ដែលមិនមានភាពស្ទួនគ្នានៃធាតុទេ ប៉ុន្តែបើយើងស្វែងយល់ពីពាក្យ “ **ស្វ៊ីត** ” គឺជាបណ្តុំនៃធាតុដែលត្រូវបានរៀបជាលំដាប់យ៉ាងជាក់លាក់ ហើយមានធាតុស្ទួនៗគ្នាផងដែរ។ ជាការពិតជាក់ស្តែង នៅពេលយើងបង់រំលោះម៉ូតូ យើងអាចបង់ជាលំដាប់ ឬការកើនឡើងចំនួនប្រជាជនជាលំដាប់ជារៀងរាល់ឆ្នាំ ពេលវាមានទម្រង់ជាស្វ៊ីត។ ដូច្នេះហើយទើបស្វ៊ីតជាផ្នែកមួយយ៉ាងសំខាន់សម្រាប់អ្នកសិក្សាដើម្បីបម្រើដល់ជីវិតជាក់ស្តែង។

១.២ សញ្ញាណនៃស្វ៊ីត

ដូចដែរយើងបានដឹងហើយថា៖

- ចំនួនគត់ធម្មជាតិ៖ $1, 2, 3, \ldots$
- ចំនួនគត់សេសតូចជាងឬស្មើ 11 ៖ $1, 3, 5, 7, 9, 11$ ។

ក្នុងទម្រង់នៃឧទាហរណ៍ខាងលើនេះ សុទ្ធតែជាទម្រង់នៃការតម្រៀបតាមលំដាប់យ៉ាងជាក់លាក់មួយដែលគេហៅថា “ **ស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត** ” ។ ចំនួននីមួយៗនៃស្វ៊ីតហៅថា “ **តួនៃស្វ៊ីត** ”។ ជាទូទៅគេតាង $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ ជាតួនៃស្វ៊ីតដែល a_1 ជាតួទីមួយ, a_2 ជាតួទីពីរ, ..., a_n ជាតួទី n ។ ម្យ៉ាងវិញគេតាងស្វ៊ីតដោយនិមិត្តសញ្ញា (a_n) ឬ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $n \in \mathbb{N}$, $\quad \mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ ។

> ! ក្នុងករណីដែលគេឱ្យចំនួនគត់ $n = 0, 1, 2, 3, 4\ldots$ មានន័យថារាប់ចាប់ពីសូន្យ នោះតួនីមួយៗនៃស្វ៊ីត (a_n) គឺផ្តើមចេញពី $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ ។

តាមរយៈឧទាហរណ៍ខាងលើ

$$1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ \dots$$

តួទីមួយ តួទីពីរ តួទីបី តួបន្តបន្ទាប់រាប់មិនអស់

ដូចនេះ ស្វ៊ីត $1, 2, 3, \dots$ ហៅថា " *ស្វ៊ីតអនន្តតួ* " ព្រោះគេមិនអាចរាប់ចំនួនតួទាំងអស់នៃស្វ៊ីតបានទេ។

$$1, 3, 5, 7, 9, 11$$

តួទីមួយ តួចុងក្រោយ (តួទីប្រាំមួយ)

ដូចនេះ ស្វ៊ីត $1, 3, 5, 7, 9, 11$ ហៅថា " *ស្វ៊ីតរាប់អស់* " ព្រោះគេអាចកំណត់តួទីមួយ និងតួចុងក្រោយ។

សំគាល់ ១.២.១ ៖

- " *ស្វ៊ីតអនន្តតួ* " គឺជាស្វ៊ីតដែលគេមិនអាចរាប់ចំនួនតួបាន។
- " *ស្វ៊ីតរាប់អស់* " គឺជាស្វ៊ីតដែលគេអាចរាប់ចំនួនតួបាន។

ជាការរំលឹក៖ តាមសៀវភៅថ្នាក់ទី **១០** ភាគ **១** ក្នុងមេរៀន **អនុគមន៍ និងក្រាបនៃអនុគមន៍** បានឱ្យនិយមន័យអនុគមន៍ដូចខាងក្រោម៖

និយមន័យ ១.២.១ ៖ ចំពោះ A និង B ជាសំណុំមិនទទេ។ បើទំនាក់ទំនង f ពីសំណុំ A និងសំណុំ B ភ្ជាប់ធាតុនីមួយៗនៃសំណុំ A ទៅនឹងធាតុតែមួយគត់នៃចំណុច B នោះទំនាក់ទំនង f ហៅថា **អនុគមន៍** ពីសំណុំ A ទៅសំណុំ B ។ គេកំណត់សរសេរ

$$.\qquad f : A \to B$$

$$x \mapsto y = f(x)$$

A ហៅថា **សំណុំដើម** ហើយ x ជាធាតុដើម $(x \in A)$ ដែល x ហៅថា **អថេរមិនអាស្រ័យ**។

B ហៅថា **សំណុំចុង** ហើយ y ជារូបភាពនៃ x តាម f និង $y = f(x)$ ហៅថា **អថេរអាស្រ័យ**។

ចូរពិនិត្យអនុគមន៍ $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ ដែល $f(x) = 2x - 3$ ។ គេបាន៖

- ចំពោះ $x=1$ នោះ $f(1)=2\times1-3=-1$
- ចំពោះ $x=2$ នោះ $f(2)=2\times2-3=1$
- ចំពោះ $x=3$ នោះ $f(3)=2\times3-3=3$
- ចំពោះ $x=4$ នោះ $f(4)=2\times4-3=5$ និងជាបន្តបន្ទាប់ ។

គេបានរូបភាពនៃអនុគមន៍គឺ $-1, 1, 3, 5, \ldots$ ដែលត្រូវនឹងជាតុដើម $1, 2, 3, 4, \ldots$ រៀងគ្នា។ ការរៀបតាមលំដាប់នៃរូបភាពរបស់អនុគមន៍ $-1, 1, 3, 5, \ldots$ នេះ បង្កើតបានជា " ស្វ៊ីតចំនួនពិត " ។ ក្នុងនោះ -1 ជាតួទី 1, 1 ជាតួទី 2, 3 ជាតួទី 3 និងជាបន្តបន្ទាប់ ។

និយមន័យ ១.២.២ ៖ " **ស្វ៊ីតចំនួនពិត** " គឺជាអនុគមន៍លេខដែលកំណត់ពីសំណុំចំនួនគត់ $\mathbb{N}$ ទៅសំណុំចំនួនពិត $\mathbb{R}$ ។

ក្នុងការសិក្សាស្វ៊ីត គេប្តូរនិមិត្តសញ្ញាអនុគមន៍ពី f ទៅជា (a_n) ដែលគេកំណត់សរសេរ

$$(a_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

និងគ្រប់តួនៃស្វ៊ីត $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ គឺជារូបភាពនៃ $1, 2, 3, \ldots, n$ រៀងគ្នា ។

ឧទាហរណ៍ 1

ចូរបំពេញតួនៃស្វ៊ីតខាងក្រោមនេះ ឱ្យបានបីតួបន្ទាប់ទៀត៖

ក. $1, 4, 7, 10, \ldots$

ខ. $1, 4, 9, 16, \ldots$

គ. $1, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}, \ldots$ ។

ដំណោះស្រាយ៖

បំពេញតួនៃស្វ៊ីតខាងក្រោមនេះ ឱ្យបានបីតួបន្ទាប់ទៀត៖

ក. $1, 4, 7, 10, \ldots$

តាង (a_n) ជាស្វ៊ីតនៃ $1, 4, 7, 10, \ldots$

គេបាន $a_1=1, a_2=4, a_3=7$ និង $a_4=10$ ។ បន្តរក a_5, a_6 និង a_7

ពិនិត្យ $a_1 = 1 = 3 \times \boxed{1} - 2$

$a_2 = 4 = 3 \times \boxed{2} - 2$

$a_3 = 7 = 3 \times \boxed{3} - 2$

$a_4 = 10 = 3 \times \boxed{4} - 2$

ដើម្បីរកតួបន្តបន្ទាប់នៃស្វ៊ីត យើងត្រូវរកលំនាំគំរូនៃតួដែលគេឱ្យជាមុនយ៉ាងតិចបីតួដំបូងៗ ដូចខាងឆ្វេងនេះ អាចសរសេរលំនាំគំរូមួយដែល 3 គុណនឹងលេខលំដាប់នៃតួ រួចដកនឹង 2 ដែលនាំឱ្យបីតួបន្ទាប់ គឺប្រើលំនាំគំរូនោះៗ

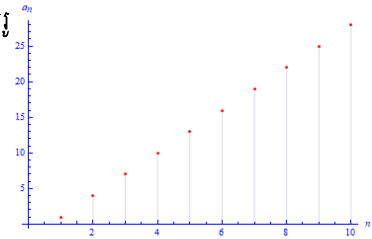
សង្កេតឃើញថា សម្រាប់បួនតួដំបូងគឺជាលំនាំគំរូ

សម្រាប់ស្វែងរកបីតួបន្ទាប់

នោះចំពោះ $a_5 = 3 \times \boxed{5} - 2 = 13$

$a_6 = 3 \times \boxed{6} - 2 = 16$

$a_7 = 3 \times \boxed{7} - 2 = 19$



ក្រាបនៃស្វ៊ីត $1, 4, 7, 10, \ldots$

ដូចនេះ ស្វ៊ីតមានលំដាប់តួគឺ $1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, \ldots$ ។

ខ. $1, 4, 9, 16, \ldots$

តាង (a_n) ជាស្វ៊ីតនៃ $1, 4, 9, 16, \ldots$

គេបាន $a_1 = 1, a_2 = 4, a_3 = 9, a_4 = 16$ ។ បន្តរក a_5, a_6, a_7

ពិនិត្យ $a_1 = 1 = \boxed{1}^2$, $a_2 = 4 = \boxed{2}^2$

$a_3 = 9 = \boxed{3}^2$, $a_4 = 16 = \boxed{4}^2$

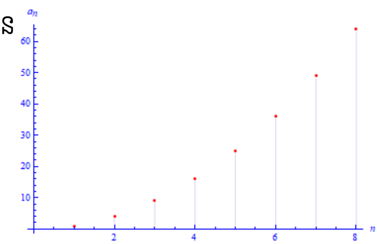
សង្កេតឃើញថា សម្រាប់បួនតួដំបូងបង្កើតបាន

លំនាំគំរូមួយគឺ ការេនៃលេខលំដាប់តួ

នោះចំពោះ $a_5 = \boxed{5}^2 = 25$

$a_6 = \boxed{6}^2 = 36$

$a_7 = \boxed{7}^2 = 49$



ក្រាបនៃស្វ៊ីត $1, 4, 9, 16, \ldots$

ដូចនេះ ស្វ៊ីតមានលំដាប់តួគឺ $1, 4, 9, 16, 25, 36, 49\ldots$ ។

គ. $1, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}, \ldots$

តាង (a_n) ជាស្វ៊ីតនៃ $1, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}, \ldots$

គេបាន $a_1=1, a_2=\dfrac{2}{3}, a_3=\dfrac{4}{9}, a_4=\dfrac{8}{27}$ ។ បន្តរក a_5, a_6, a_7

ពិនិត្យ $a_1=1=\left(\dfrac{2}{3}\right)^0=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{1-1}$

$$a_2=\frac{2}{3}=\left(\frac{2}{3}\right)^1=\left(\frac{2}{3}\right)^{2-1}$$

$$a_3=\frac{4}{9}=\left(\frac{2}{3}\right)^2=\left(\frac{2}{3}\right)^{3-1}$$

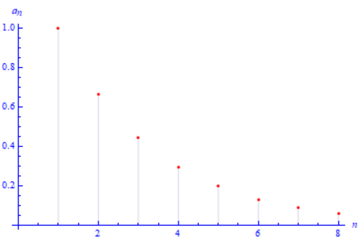
$$a_4=\frac{8}{27}=\left(\frac{2}{3}\right)^3=\left(\frac{2}{3}\right)^{4-1}$$

សង្កេតឃើញថា សម្រាប់បួនតួដំបូងបង្កើតបានលំនាំគំរូមួយគឺ $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\text{លេខលំដាប់តួ}-1}$

នោះ $a_5=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{5-1}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^4=\dfrac{16}{81}$

$$a_6=\left(\frac{2}{3}\right)^{6-1}=\left(\frac{2}{3}\right)^5=\frac{32}{243}$$

$$a_7=\left(\frac{2}{3}\right)^{7-1}=\left(\frac{2}{3}\right)^6=\frac{64}{729}$$



ក្រាបនៃស៊្វីត $1, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}, \ldots$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ស្វ៊ីតមានលំដាប់តួគឺ } 1, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}, \frac{16}{81}, \frac{32}{243}, \frac{64}{729}, \ldots \text{ ។}}$

■

ឧទាហរណ៍ 2

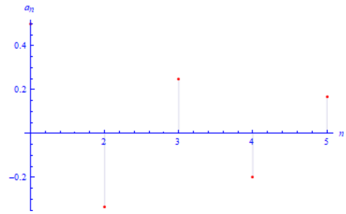
សរសេរគ្រប់តួនៃស្វ៊ីតរាប់អស់ $a_n=\dfrac{(-1)^{n-1}}{n+1}$ ចំពោះ $1\le n\le 5$ ។

ដំណោះស្រាយ៖

សរសេរគ្រប់តួនៃស្វ៊ីតរាប់អស់ $a_n=\dfrac{(-1)^{n-1}}{n+1}$

ចំពោះ $1\le n\le 5$ មានន័យថា $n=1,2,3,4,5$ នោះគេបាន

- ចំពោះ $n=1$ នោះ $a_1=\dfrac{(-1)^{1-1}}{1+1}=\dfrac{1}{2}$
- ចំពោះ $n=2$ នោះ $a_2=\dfrac{(-1)^{2-1}}{2+1}=-\dfrac{1}{3}$
- ចំពោះ $n=3$ នោះ $a_3=\dfrac{(-1)^{3-1}}{3+1}=\dfrac{1}{4}$
- ចំពោះ $n=4$ នោះ $a_4=\dfrac{(-1)^{4-1}}{4+1}=-\dfrac{1}{5}$
- ចំពោះ $n=5$ នោះ $a_5=\dfrac{(-1)^{5-1}}{5+1}=\dfrac{1}{6}$



ក្រាបនៃស្វ៊ីត $a_n=\dfrac{(-1)^{n-1}}{n+1}$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ស្វ៊ីតរាប់អស់គឺ } \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{6} \text{ ។}}$ ■

ប្រធានលំហាត់ ១

១. គេឱ្យស្វ៊ីត $3, 8, 15, \ldots$ ។ បន្តសរសេរស្វ៊ីតនេះឱ្យបានបីតួទៀត ។

២. សរសេរតួនៃស្វ៊ីត (a_n) កំណត់ដោយ $a_n=\dfrac{1}{n+2}$ ដែល $1\le n\le 4$ ។

៣. សរសេរតួនៃស្វ៊ីតតាមលំដាប់តគ្នា $a_n=2+\dfrac{1}{2^n}$ ដែល $n\in\mathbb{N}$។

ដំណោះស្រាយ៖

១. សរសេរស្វ៊ីតនេះឱ្យបានបីតួទៀត

គេមានស្វ៊ីត $3, 8, 15, \ldots$ ដែលមាន $a_1=3, a_2=8$ និង $a_3=15$ នោះ

$a_1=3=\boxed{1}^2+2\times\boxed{1}$

$a_2=8=\boxed{2}^2+2\times\boxed{2}$

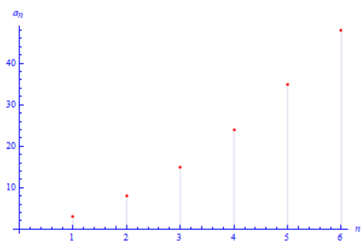
$a_3=15=\boxed{3}^2+2\times\boxed{3}$

គេបានបីតួបន្ទាប់៖

$a_4=\boxed{4}^2+2\times\boxed{4}=24$

$a_5=\boxed{5}^2+2\times\boxed{5}=35$

$a_6=\boxed{6}^2+2\times\boxed{6}=48$



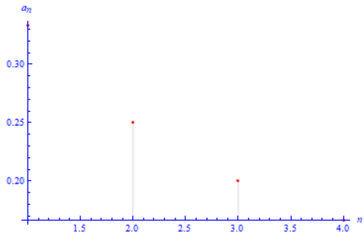
ក្រាបនៃស្វ៊ីត 3, 8,5, 24, ...

ដូចនេះ $\boxed{\text{ស្វ៊ីតមានលំដាប់តួគឺ } 3, 8, 15, 24, 35, 48, \ldots \text{ ។}}$

២. សរសេរតួនៃស្វ៊ីត (a_n) កំណត់ដោយ $a_n = \dfrac{1}{n+2}$ ដែល $1 \leq n \leq 4$

គេបានតួនៃស្វ៊ីតនីមួយៗចំពោះតម្លៃ $1 \leq n \leq 4$ គឺ៖

- ចំពោះ $n = 1$ នោះ $a_1 = \dfrac{1}{1+2} = \dfrac{1}{3}$
- ចំពោះ $n = 2$ នោះ $a_2 = \dfrac{1}{2+2} = \dfrac{1}{4}$
- ចំពោះ $n = 3$ នោះ $a_3 = \dfrac{1}{3+2} = \dfrac{1}{5}$
- ចំពោះ $n = 4$ នោះ $a_4 = \dfrac{1}{4+2} = \dfrac{1}{6}$



ក្រាបនៃស្វ៊ីត $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}$

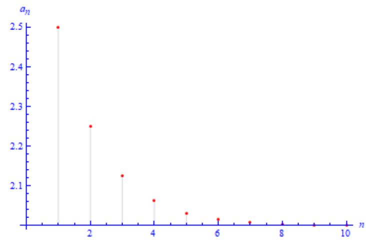
ដូចនេះ $\boxed{\text{ស្វ៊ីតមានលំដាប់តួគឺ } \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{5}, \dfrac{1}{6} \text{ ។}}$

៣. សរសេរតួនៃស្វ៊ីតតាមលំដាប់តគ្នា $a_n = 2 + \dfrac{1}{2^n}$ ដែល $n \in \mathbb{N}$

គេបានតួនៃស្វ៊ីតនីមួយៗ ចំពោះតម្លៃ $n \in \mathbb{N}$ គឺ៖

- ចំពោះ $n = 1$ នោះ $a_1 = 2 + \dfrac{1}{2^1} = \dfrac{5}{2}$
- ចំពោះ $n = 2$ នោះ $a_2 = 2 + \dfrac{1}{2^2} = \dfrac{9}{4}$
- ចំពោះ $n = 3$ នោះ $a_3 = 2 + \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{17}{8}$
- ចំពោះ $n = 4$ នោះ $a_4 = 2 + \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{33}{16}$

. $\quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$



ក្រាបនៃស្វ៊ីត $\frac{5}{2}, \frac{9}{4}, \frac{17}{8}, \frac{33}{16} \ldots$

ដោយសារតែ $n \in \mathbb{N}$ នោះស្វ៊ីត (a_n) ជាស្វ៊ីតអនន្តតួ ព្រោះសំណុំចំនួនគត់ $\mathbb{N}$ ជាសំណុំរាប់មិនអស់។

ដូចនេះ $\boxed{\text{ស្វ៊ីត } (a_n) = \dfrac{5}{2}, \dfrac{9}{4}, \dfrac{17}{8}, \dfrac{33}{16}, \ldots \text{ ។}}$

■

១.៣ តួទី n នៃស្វ៊ីត

តាមរយៈឧទាហរណ៍ទី 1 ខាងលើ គេអាចរកបានតួបន្តបន្ទាប់ ក្រោយពេលដែលយើងបានកំណត់លំនាំគំរូនៃតួយ៉ាងតិចបីដំបូង។ ដូច្នេះ បើសិនជាយើងបន្តរកបន្តបន្ទាប់រហូតដល់តួចុងក្រោយ នោះវានឹងមិនអាចទៅរួចទេចំពោះស្វ៊ីតអនន្តតួ។ ដូចនេះ គេធ្វើការតាងតម្លៃ a_n ជាតម្លៃនៃតួចុងក្រោយនៃ

ស្វីត (a_n) ចំពោះ $n \in \mathbb{N}$ ។ នៅពេលដែលយើងអាចសរសេរតួទី n បាន មានន័យថា យើងអាចរកបានលំនាំគំរូមួយយ៉ាងជាក់លាក់ ដែលវាមានប្រយោជន៍ក្នុងការរកតម្លៃនៃតួណាមួយដែលយើងចង់បាន ឬពង្រីកទំហំនៃស្វីតឱ្យកាន់តែធំជាងតួទី n ផងដែរ។

ឧទាហរណ៍ 3

គេមានស្វីត $2, 8, 18, 32, \ldots$ ។

ក. កំណត់តួទី n នៃស្វីតខាងលើចំពោះ $\forall n \in \mathbb{N}$ ។

ខ. រកតម្លៃនៃតួទី 12 និង តួទី 20 ។

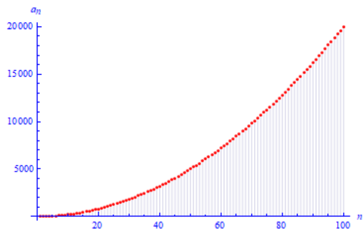
ដំណោះស្រាយ៖

ក. កំណត់តួទី n នៃស្វីត

តាង (a_n) ជាស្វីតនៃ $2, 8, 18, 32, \ldots$

ពិនិត្យ

$$\begin{aligned} a_1 &= 2 = 2 \times \boxed{1}^2 \\ a_2 &= 8 = 2 \times \boxed{2}^2 \\ a_3 &= 18 = 2 \times \boxed{3}^2 \\ a_4 &= 32 = 2 \times \boxed{4}^2 \\ &\vdots \quad \vdots \\ a_n &= 2 \times \boxed{n}^2 \end{aligned}$$



ក្រាបនៃស្វីត $2, 8, 18, 32, \ldots$

ដូចនេះ $\boxed{\text{តួនៃ } n \text{ នៃស្វីតគឺ } a_n = 2n^2 \text{ ។}}$

ខ. រកតម្លៃនៃតួទី 12 និង តួទី 20

តាមចម្លើយ ក. គេរកបានតួទី n នៃស្វីតគឺ $a_n = 2n^2$

នោះគេបាន ចំពោះ $n = 12$ នាំឱ្យ $a_{12} = 2 \times (12)^2 = 288$

ចំពោះ $n = 20$ នាំឱ្យ $a_{20} = 2 \times (20)^2 = 800$

ដូចនេះ $\boxed{\text{តម្លៃនៃតួទី 12 គឺ 288 និងតម្លៃនៃតួទី 20 គឺ 800 ។}}$

■

ការសរសេរលំនាំតួនៃបីឬបួនតួដំបូង មិនមែនជារឿងងាយនោះទេ ពោលយើងត្រូវរិះគិត សរសេរយ៉ាងណាឱ្យរាងផ្ទៀងផ្ទាត់តម្លៃដើម និងត្រូវគ្នាជាមួយតម្លៃនៃតួៗ ក្រោយបានលំនាំតួ គេអាចបន្តរកដល់តួចុងក្រោយគឺតួទី n ប៉ុន្តែមិនមែនមានន័យថាអាចរាប់អស់នោះទេ ពោលវាជាការសន្មតថាតួទី n ដែល $n \in \mathbb{N}$ ជាតួចុងក្រោយៗ

ប្រូឥបត្តិ ២

កំណត់តួទី n ចំពោះ $\forall n \in \mathbb{N}$ នៃស៊្វីតខាងក្រោម៖

ក. $-1, 2, 7, 14, 23, \ldots$

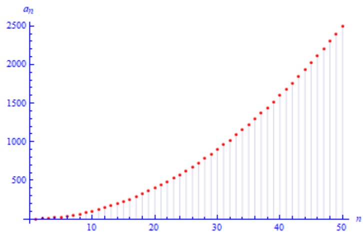
ខ. $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots$ ។

ដំណោះស្រាយ៖

កំណត់តួទី n ចំពោះ $\forall n \in \mathbb{N}$ នៃស៊្វីតខាងក្រោម៖

ក. តាង (a_n) ជាស៊្វីតនៃ $-1, 2, 7, 14, 23, \ldots$

ពិនិត្យ
$$\begin{aligned} a_1 &= -1 = 1^2 - 2 \\ a_2 &= 2 = 2^2 - 2 \\ a_3 &= 7 = 3^2 - 2 \\ a_4 &= 14 = 4^2 - 2 \\ &\vdots \\ a_n &= n^2 - 2 \end{aligned}$$

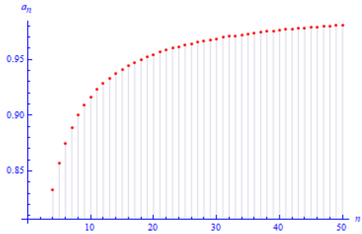


ក្រាបនៃស៊្វីត $-1, 2, 7, 14, 23, \ldots$

ដូចនេះ $\boxed{\text{តួទី } n \text{ ចំពោះ } \forall n \in \mathbb{N} \text{ គឺ } a_n = n^2 - 2 \text{ ។}}$

ខ. តាង a_n ជាស៊្វីតនៃ $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots$

ពិនិត្យ
$$a_1 = \frac{2}{3} = \frac{\boxed{1}+1}{\boxed{1}+2}$$
$$a_2 = \frac{3}{4} = \frac{\boxed{2}+1}{\boxed{2}+2}$$
$$a_3 = \frac{4}{5} = \frac{\boxed{3}+1}{\boxed{3}+2}$$
$$a_4 = \frac{5}{6} = \frac{\boxed{4}+1}{\boxed{4}+2}$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$a_n = \frac{\boxed{n}+1}{\boxed{n}+2}$$



ក្រាបនៃស្វ៊ីត $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots$

ដូចនេះ: $\boxed{\text{តួទី } n \text{ ចំពោះ } \forall n \in \mathbb{N} \text{ គឺ } a_n = \frac{n+1}{n+2} \text{ ។}}$

■

១.៤ អថេរភាពនៃស្វ៊ីត

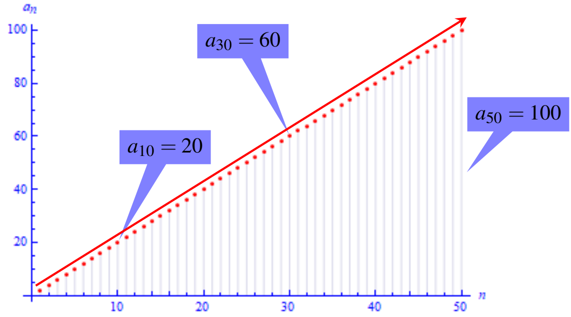
ក្រោយពីយើងបានសិក្សាពីសញ្ញាណនៃស្វ៊ីត យើងនឹងបន្តសិក្សាពីអថេរភាពនៃស្វ៊ីត មានន័យថាយើងនឹងសិក្សាពីភាពកើន និងចុះនៃស្វ៊ីត និងស្វ៊ីតម៉ូណូតូន (កើន ឬចុះ) ។

១.៤.១ ស្វ៊ីតកើន ស្វ៊ីតចុះ

▮ គេឱ្យស្វ៊ីត $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $a_n = 2n$ ។ នោះតួនៃស្វ៊ីត a_n គឺ $2, 4, 6, 8, 10...$ ។
តាមលំដាប់តួនៃស្វ៊ីត គេសង្កេតឃើញថា៖

$2 < 4 < 6 < \cdots < 100 < 102 < \cdots$ ឬ $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_n < a_{n+1} < \cdots$

ដូចនេះ បើ $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_n < a_{n+1} < \cdots$ គេថាស្វ៊ីតនេះជា **ស្វ៊ីតកើន** ។



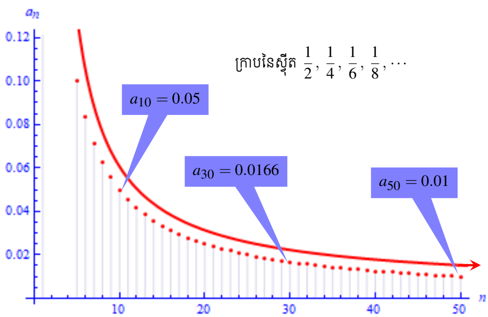
ក្រាបនៃស្វ៊ីត $2, 4, 6, 8, 10, \cdots$

ក្រាបខាងលើនេះ បង្ហាញពីទាពកើននៃស្វ៊ីត $2, 4, 6, 8, \ldots$ ។ កាលណាតម្លៃ n កាន់តែកើន នោះតម្លៃតួនៃស្វ៊ីត a_n ក៏កើនតាមហ្នឹងដែរ ។ ក្រាបនេះមិនមែនមានន័យថា $n = 50$ ជាតម្លៃចុងក្រោយនៃស្វ៊ីតនោះទេ ប្រសិនបើបន្តយក $n = 52, 54, 56, \ldots$ នោះតម្លៃតួនីមួយៗនឹងកើនឡើងជាបន្តបន្ទាប់ ។

■ ម្យ៉ាងវិញបើគេឱ្យស្វ៊ីត $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $a_n = \dfrac{1}{2n}$ ។ នោះតួនៃស្វ៊ីត a_n គឺ $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{8}, \cdots$ ។ តាមលំដាប់តួនៃស្វ៊ីត គេសង្កេតឃើញថា៖

$\dfrac{1}{2} > \dfrac{1}{4} > \cdots > \dfrac{1}{2n} > \dfrac{1}{2(n+1)} > \cdots$ ឬ $a_1 > a_2 > \cdots > a_n > a_{n+1} \cdots$

ដូចនេះ បើ $a_1 > a_2 > a_3 > \cdots > a_n > a_{n+1} \cdots$ គេថាស្វ៊ីតនេះជា ស្វ៊ីតចុះ ។



ក្រាបខាងលើនេះ បង្ហាញពីទាពចុះនៃស្វ៊ីត $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \cdots$ ។ កាលណាតម្លៃ n កាន់តែកើន នោះតម្លៃតួនៃស្វ៊ីត a_n កាន់តែចុះតាមហ្នឹង ។ ក្រាបនេះមិនមែនមានន័យថា $n = 50$ ជាតម្លៃចុងក្រោយនៃស្វ៊ីតនោះទេ ប្រសិនបើបន្តយក $n = 52, 54, 56, \ldots$ នោះតម្លៃតួនីមួយៗនឹងចុះជាបន្តបន្ទាប់ ។

និយមន័យ ១.៤.៣ ៖

❖ ស្វ៊ីត (a_n) ជា ស្វ៊ីតកើន លុះត្រាតែគ្រប់ចំនួនគត់ $n \in \mathbb{N}$ គេបាន

$$a_{n+1} > a_n \text{ ឬ } a_{n+1} - a_n > 0 \text{ ឬ } \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \text{ ។}$$

❖ ស្វ៊ីត (a_n) ជា ស្វ៊ីតចុះ លុះត្រាតែគ្រប់ចំនួនគត់ $n \in \mathbb{N}$ គេបាន

$$a_{n+1} < a_n \text{ ឬ } a_{n+1} - a_n < 0 \text{ ឬ } \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \text{ ។}$$

ឧទាហរណ៍ 4

ក. បង្ហាញថាស្វ៊ីត (a_n) ដែល $a_n = 3n+2$ ជាស្វ៊ីតកើន ។

ខ. បង្ហាញថាស្វ៊ីត (a_n) ដែល $a_n = 2-3n$ ជាស្វ៊ីតចុះ ។

ដំណោះស្រាយ៖

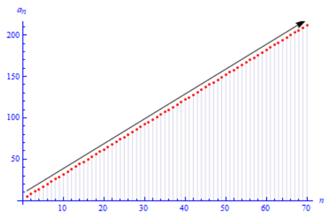
ក. បង្ហាញថាស្វ៊ីត (a_n) ដែល $a_n = 3n+2$ ជាស្វ៊ីតកើន

គេមាន $a_n = 3n+2$

នាំឱ្យ $a_{n+1} = 3(n+1)+2 = 3n+3$

គេបាន $a_{n+1} - a_n = 3n+3-(3n+2)$

$$= 1 > 0$$



ក្រាបនៃស្វ៊ីត (a_n) ដែល $a_n = 3n+2$

ដូចនេះ: $\boxed{\text{ស្វ៊ីត } (a_n) \text{ ដែល } a_n = 3n+2 \text{ ជាស្វ៊ីតកើន ។}}$

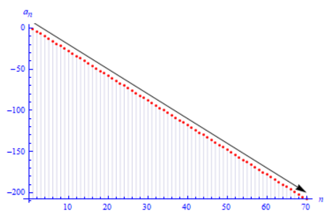
ខ. បង្ហាញថាស្វ៊ីត (a_n) ដែល $a_n = 2-3n$ ជាស្វ៊ីតចុះ

គេមាន $a_n = 2-3n$

នាំឱ្យ $a_{n+1} = 2-3(n+1) = -3n-1$

គេបាន $a_{n+1} - a_n = -3n-1-(2-3n)$

$$= -3 < 0$$



ក្រាបនៃស្វ៊ីត (a_n) ដែល $a_n = 2-3n$

ដូចនេះ: $\boxed{\text{ស្វ៊ីត } (a_n) \text{ ដែល } a_n = 2-3n \text{ ជាស្វ៊ីតចុះ ។}}$

■