អារម្ភកថា

គណិតវិទ្យាជាបិតាវិទ្យាសាស្ត្រដែលមានវិសាលភាពធំធេងដែលជះឥទ្ធិពលមកលើភពផែនដី។ កំណើតនៃគណិតវិទ្យាបានកកើតតាំងពីសម័យក្រិកបុរាណមកម្ល៉េះ រហូតមកដល់ពេលបច្ចុប្បន្ន គណិតវិទ្យាត្រូវបានគណិតវិទូជាច្រើននាក់បានបង្កើតជាទ្រឹស្តី រូបមន្ត និងបញ្ហាដំណោះស្រាយជាច្រើន បង្កើតជាផ្លូវមួយដែលអាចបំភ្លឺមនុស្សឱ្យមានការរុករក បង្កើតអ្វីដែលថ្មី ដោយពោសពេញដោយបច្ចេកវិទ្យា។ ក្រោយវិសាលភាពគណិតវិទ្យាបានសាយភាយរហូតមកដល់ពេលបច្ចុប្បន្ន មនុស្សអាចបង្កើតអ្វីៗអស្ចារ្យជាច្រើន ដូចជា មនុស្សមានសមត្ថភាពជាន់លើភពព្រះចន្ទ អាចបង្កើតគ្រាប់នុយក្លេអ៊ែរសម្រាប់សង្គ្រាម ឬភាពទាន់សម័យនៃកុំព្យូទ័រ ទូរស័ព្ទ ឬមនុស្សយន្តជាដើម សុទ្ធសឹងមានគណិតវិទ្យាចូលរួមទាំងអស់។ ដូចនេះ បើគ្មានគណិតវិទ្យា មនុស្សប្រហែលធ្វើសង្គ្រាមដោយថ្ម និងដំបង គ្មានអ្វីៗដែលមនុស្សអាចបង្កើតបានទេ ហើយការរស់នៅនឹងដូចទៅនឹងសម័យក្រិកបុរាណជាមិនខាន។

ដោយសារតែគណិតវិទ្យាជាបិតាវិទ្យាសាស្ត្រមួយក្នុងលោក បានធ្វើឱ្យមនុស្សគ្រប់រូបជាពិសេសសិស្សានុសិស្សមានគំនិតមួយគិតថា គណិតវិទ្យាពិបាករៀន មិនអាចចាប់បានដូចមុខវិជ្ជាដ៏ទៃទៀត។ ជាការពិតទៅ គណិតវិទ្យាជាមុខវិជ្ជាមួយដែលតម្រូវឱ្យសិស្សមានការគិត និងអនុវត្តដោយចំណាយពេលទៅលើវាឱ្យបានច្រើន ដូចជា ការអនុវត្តលំហាត់ឱ្យបានច្រើន និងមានឆន្ទៈក្នុងការគិត ដែលទាំងអស់នេះជាកត្តាមួយជម្រុញដល់អ្នកសិក្សា អាចទទួលបានចំណេះដឹងពីគណិតវិទ្យាបានយ៉ាងល្អ។

ដោយសារតែបញ្ហានេះ បានធ្វើឱ្យសៀវភៅមួយក្បាលតូចមួយនេះបានប្រសូត្រឡើងក្នុងរយៈពេលចងក្រងក្នុងរយៈពេលប្រាំពីរខែកន្លងមកនេះ។ សៀវភៅ **ចំនួនកុំផ្លិច** នេះគឺត្រូវបានរៀបចំឡើងដោយមានការពន្យល់បកស្រាយនូវខ្លឹមសារមេរៀន និងរូបមន្ត។ ក្នុងនោះផងដែរ ខ្ញុំបាទបានបញ្ចូលនូវឧទាហរណ៍ លំហាត់ និងដំណោះស្រាយ និងលំហាត់អនុវត្តន៍ ដែលបានបកស្រង់ពីស្តង់ជាការប្រឡងពីប្រទេសមួយចំនួន និងបូករួមជាមួយការបង្កើតថ្មី ដែលទាំងអស់សម្រាប់ធ្វើការវាស់ស្តង់សមត្ថភាពរបស់អ្នកសិក្សាដែលបានកាន់សៀវភៅមួយក្បាលនេះ។

ក្នុងនាមជាអ្នករៀបរៀង និងនិពន្ធ ខ្ញុំបាទពេញចិត្តក្នុងការទទួលយកនូវការរិះគន់ក្នុងន័យកែលម្អជានិច្ច។ ខ្ញុំជឿជាក់ថាសៀវភៅមួយក្បាលដែលជាស្នាដៃរបស់ខ្ញុំបាទដំបូងនេះ ប្រាកដជាមានកំហុកខុសឆ្គង ហេតុនេះខ្ញុំសូមអភ័យទោសទុកជាមុនរាល់កំហុសទាំងអស់ដែលបានកើតឡើង។ ប្រសិនបើអ្នកសិក្សារកឃើញនូវភាពខ្វះខាតឬកំហុស សូមទំនាក់ទំនងមកកាន់ខ្ញុំបាទ

តាមរយៈ   Facebook Account: Phan Kimsia

Email: phankimsie03@gmail.com

ភ្នំពេញ, ថ្ងៃទី ០១ ខែ មិថុនា ឆ្នាំ ២០២០

ផាន់ គីមសៀ

ទទួលសិទ្ធិលក់ផ្តាច់មុខដោយ Math Team Kh

Facebook Page: Math Team Kh

ការចេញផ្សាយលើកទីបី

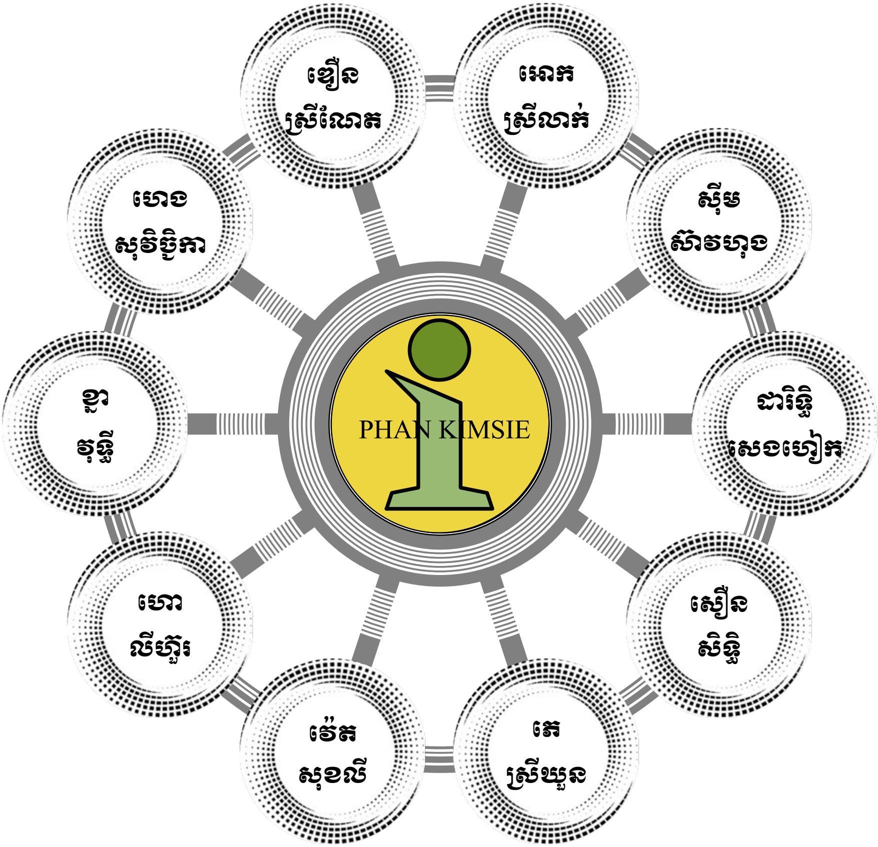
សៀវភៅ **ចំនួនកុំផ្លិច** នេះបានចេញផ្សាយរួចមកហើយកាលពីដើមខែមិថុនា។ ក្នុងកំឡុងពេលចេញផ្សាយ ខ្ញុំបាទបានទទួលមតិយោបល់ពីអ្នកសិក្សាមួយចំនួនមកកាន់ខ្ញុំ រាល់កន្លែងដែលខ្ញុំបានសរសេរមិនត្រឹមត្រូវ ឬខុសបច្ចេកទេសក្នុងការរៀបរៀង ទន្ទឹមនឹងនោះ ខ្ញុំក៏បានធ្វើដំណើរការត្រួតពិនិត្យជាថ្មីពីទំព័រដើមដល់ទំព័របញ្ចប់ ក៏បានឃើញថាពិតជាមានកំហុសច្រើន ទើបកត្តាទាំងនេះបានជម្រុញឱ្យខ្ញុំឆ្លៀតពេល កែតម្រូវសៀវភៅមួយក្បាលនេះ ឱ្យកាន់តែមានភាពល្អប្រសើរឡើងមួយកម្រិតទៀត។ ខ្ញុំសូមចេញមុខទទួលខុសត្រូវរាល់កំហុសខុសឆ្គងដែលបានបង្កឱ្យមាន ព្រោះវាជាបទពិសោធន៍នៃការចងក្រងដំបូងរបស់ខ្ញុំ ម្យ៉ាងវិញវាពិតណាស់ជាកំហុសរបស់ខ្ញុំ ព្រោះខ្ញុំមិនបានកែតម្រូវពីដំបូងឱ្យបានគ្រប់គ្រាន់ ណាមួយការត្រួតពិនិត្យមានចន្លោះខ្វះខាតច្រើន។ ដូចនេះរាល់កំហុសដែលកើតមាន ខ្ញុំបាទសូមអធ្យាស្រ័យពីសំណាក់អ្នកសិក្សាគ្រប់មជ្ឈដ្ឋាន ហើយខ្ញុំនឹងសប្បាយចិត្តយ៉ាងក្រៃលែងក្នុងការទទួលយកមតិបែបស្ថាបនាលើសៀវភៅពីអ្នករាល់គ្នាជានិច្ច។

ក្នុងការចេញផ្សាយជាលើកទីបីនេះ ខ្ញុំបាទបានកែតម្រូវរាល់កំហុសដូចជាការប្រើប្រាស់អក្ខរាវិរុទ្ធមិនត្រឹមត្រូវ ការកែតម្រូវនូវអ្វីដែលដោះស្រាយមិនបានត្រឹមត្រូវ ការរៀបរៀងសារជាថ្មីទៅការសរសេរពោលសរសេរឱ្យមានរបៀបស្អាតតាមអ្វីដែលអាចធ្វើទៅបាន ក្រោមលក្ខខណ្ឌសម្រាយឱ្យមានភាពងាយស្រួលក្នុងការទទួលចំណេះដឹងពីសៀវភៅនេះ។ ក្រៅពីនេះ ខ្ញុំបាទបានកាត់បន្ថយលំហាត់ពិបាកមួយចំនួនតូចនិងលំហាត់ QCM ហើយបញ្ចូលនូវលំហាត់អនុវត្តន៍ដែលសរុបចំនួន 25 លំហាត់ដែលអ្នកអាចយកទៅអនុវត្តដើម្បីវាស់ស្ទង់វាយតម្លៃការសិក្សារបស់អ្នក។ លំហាត់អនុវត្តន៍ទាំងនោះមានលក្ខណៈប្រហាក់ប្រហែលនឹងលំហាត់ធ្លាប់ចេញលើការប្រឡងបាក់ឌុប។

សរុបមក ក្នុងនាមខ្ញុំជាអ្នករៀបរៀងលើការបង្កើតស្នាដៃដំបូង ពិតណាស់គឺមានកំហុសច្រើន តែយ៉ាងណាមិញខ្ញុំបានចំណាយពេលច្រើនគួរសម សម្រាប់កែតម្រូវឱ្យមានភាពប្រសើរឡើងលើឯកសារនេះ ដើម្បីផ្តល់ជូនអ្នកសិក្សា និងទុកសម្រាប់អ្នកជំនាន់ក្រោយ។ ខ្ញុំបាទសូមអធ្យាស្រ័យរាល់កំហុសខុសឆ្គងទាំងឡាយលើការរៀបរៀងនេះ ខ្ញុំពេញចិត្តណាស់ចំពោះការផ្តល់បញ្ហាមកកាន់ខ្ញុំ ហើយខ្ញុំសប្បាយចិត្តក្នុងការសម្រួលជានិច្ច។ ខ្ញុំនឹងប្តេជ្ញាថា ខ្ញុំនឹងរកពេលវេលាណាមួយដែលសាកសមដើម្បីដំណើរការការត្រួតពិនិត្យជាលើកទីបួន និងបន្តបន្ទាប់ទៀតជាមិនខាន។

សូមអរគុណ !!!

គណៈកម្មការ ត្រួតពិនិត្យ



Designed Cover by: ទ៉ុន ឆាលី

រៀបរៀងដោយៈ ផាន់ គឹមសៀ

និមិត្តសញ្ញាគណិតវិទ្យា

$(\ )$	:	វង់ក្រចក
$[\ ]$	:	ឃ្នាប ឬដង្កៀប
$\{\ \}$	:	របាំង ឬសំណុំ
$\|\ \|$	:	តម្លៃដាច់ខាត ឬប្រវែង
$\wedge$	:	ឈ្នាប់និង
$\vee$	:	ឈ្នាប់ឬ
$\bar{}$ or $\neg$	:	ឈ្នាប់មិន
$\Longrightarrow$	:	ឈ្នាប់នាំឱ្យ
$\Longleftrightarrow$	:	ឈ្នាប់សមមូល
ត.(A)	:	តម្លៃភាពពិតនៃសំណើ A
$[a,b]$	:	ចន្លោះបិទ
(a,b)	:	ចន្លោះបើក
$(a,b]$	:	ចន្លោះកន្លះបើកខាងឆ្វេង
$[a,b)$	:	ចន្លោះកន្លះបើកខាងស្តាំ
$\forall$	:	ចំពោះគ្រប់
$\exists$	:	មាន
$\nexists$	:	មិនមាន
$\because$	:	ពីព្រោះ
$\therefore$	:	ដូចនេះ
$:$ or $\|$	:	ដែល
$\equiv$	:	សមមូល

$\in$	:	របស់
$\notin$	:	មិនរបស់
$\mathbb{N}$	:	សំណុំចំនួនគត់ធម្មជាតិ
$\mathbb{W}$	:	សំណុំចំនួនគត់
$\mathbb{Z}$	:	សំណុំចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប
$\mathbb{Z}^+$	:	សំណុំចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបវិជ្ជមាន
$\mathbb{Q}$	:	សំណុំចំនួនសនិទាន
$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$	:	សំណុំចំនួនអសនិទាន
$\mathbb{R}$	:	សំណុំចំនួនពិត
$\mathbb{C}$	:	សំណុំចំនួនកុំផ្លិច
$A = \{a, b\}$	:	សំណុំ A ដែលមានធាតុ a, b
$\overline{A}$ or A^C	:	សំណុំរងបំពេញនៃសំណុំ A
$P(A)$	:	សំណុំស្វ័យគុណនៃសំណុំ A
$\varnothing$	:	សំណុំទទេ
$n(A)$	:	ចំនួនធាតុនៃសំណុំ A
$\subset$	:	នៅក្នុង
$\subseteq$	:	នៅក្នុងឬស្មើ
$\not\subset$	:	មិននៅក្នុង
$\not\subseteq$	:	មិននៅក្នុងឬមិនស្មើ
$\cup$	:	ប្រជុំ
$\cap$	:	ប្រសព្វ
$A \setminus B$	:	ផលសងនៃសំណុំ A និង B

មាតិកា

I	មេរៀន

I

PHAN KIMSIE

Mathematics may not teach us how to add love or subtract hate, but it gives us hope that every problem has a solution.
Annoymous

១

Education is the most powerful weapon which you can use to change the world.
Nelson Mandela

P H A N K I M S I E

ចំនួនកុំផ្លិច

១.១ ប្រវត្តិ និង អត្ថប្រយោជន៍នៃចំនួនកុំផ្លិច

១.១.១ ប្រវត្តិនៃចំនួនកុំផ្លិច

កាលពី 1600ឆ្នាំមុន មានអ្នកប្រាជ្ញវិទូគណិតវិទ្យាពីអឺរ៉ុបជាជនជាតិអ៊ីតាលី មានឈ្មោះ Niccolo Fontana Tartaglia និង Gerolamo Cardano ដែលបានចាប់អារម្មណ៍ទៅនឹងផ្នែកមួយនៃគណិតវិទ្យា ហើយក៏ ព្យាយាមសិក្សាដែលមិនមានភាពទូលំទូលាយដែលបច្ចុប្បន្នយើងគ្រប់គ្នាហៅថា **ចំនួនកុំផ្លិច** ។ បន្ទាប់មកអ្នកប្រាជ្ញ ជាច្រើនរូបទៀត ក៏បានចាប់ផ្តើមស្រាវជ្រាវបន្ថែមទៀត។ ក្រោយមកគណិតវិទូជនជាតិក្រិចឈ្មោះ Hero of Alexandria បានលើកឡើងពីចំនួននិម្មិតនៅក្នុងសៀវភៅមួយក្បាលជាលើកដំបូងនៅសតវត្សទី១ នៃគ.ស។ ដំបូងគាត់បានជួបបញ្ហាដោយចៃដន្យក្នុងការគណនាតំបន់ត្រីកោណមួយដែលមិនអាចទៅរួច គឺតម្លៃ $\sqrt{-63}$ គាត់ក៏បានប្រែទៅជា -63 វិជ្ជមានហើយបន្តគណនា តទៅមុខ។ប៉ុន្តែការគណនារបស់គាត់ ខុសពីក្បួនគណិតវិទ្យា។ ក្រោយមកទៀតក៏មានការបង្កើតលេខនិម្មិត នេះឡើង ដើម្បីជុសជុលដំណោះស្រាយរបស់គាត់ ដោយសន្មតយក i ក្នុងការដោះស្រាយឫសការេនៃចំនួន អវិជ្ជមាន ។ ជាង 100ឆ្នាំក្រោយមក មានគណិតវិទូឈ្មោះ Rafael Bombelli ជនជាតិអ៊ីតាលី បានបន្តសិក្សាពីចំនួននិម្មិត i បន្ថែមទៀត ហើយក្រោយៗមកមានការបន្តបង្កើតក្បួនច្បាប់ផ្សេងៗទៀតដូចជា ការប្រមាណវិធីដែលទាក់ ទងជាមួយ i ដែលជាប្រមាណវិធីចំនួនកុំផ្លិច ក្រោមស្នាដៃរបស់គណិតវិទូផ្សេងទៀត ។

Rafael Bombelli (1526-1572)

Girolamo Cardano (1501-1576)

Hero of Alexandria (10AD-70AD)

Niccolo Fontana Tartaglia (1500-1557)

១.១.២ អត្ថប្រយោជន៍នៃចំនួនកុំផ្លិច

ចំនួនកុំផ្លិចដែលលោកអ្នកកាន់នឹងដៃនេះ វាមានសារៈសំខាន់យ៉ាងទូលំទូលាយនាសតវត្សទី 21 ដែលយើង មិនទាន់ដឹងថាវាមានអត្ថប្រយោជន៍បែបណានោះទេ។ តាមឯកសារយោងដែលបានដកស្រង់ បានបង្ហាញថាចំនួន កុំផ្លិចនេះគេយកទៅប្រើប្រាស់ក្នុងផ្នែកវិទ្យាសាស្ត្រគឺ ការបម្រើក្នុងចរន្តឆ្លាស់ AC កាត់បន្ថយការប្រើប្រាស់ ភ្លើងច្រើន ការបង្កើតបច្ចេកវិទ្យាឥតខ្សែដូចជា រ៉ាដា ការស្កេតខួរក្បាល និង បច្ចេកវិទ្យាកោសិកាបម្រើក្នុង វិស័យ វេជ្ជសាស្ត្រនិងមានអត្ថប្រយោជន៍ ផ្សេងៗទៀត ។

Mathematics
may not teach us how to
add love or subtract hate,
but it gives us hope
that every problem
has a solution.
Annoymous

២

P H A N K I M S I E

Education is the most
powerful weapon
which you can use to
change the world.
Nelson Mandela

មូលដ្ឋានគ្រឹះពិជគណិតនៃចំនួនកុំផ្លិច

២.១ និយមន័យចំនួននិម្មិត

និយមន័យ ២.១.១ ចំនួននិម្មិត គឺជាផលគុណរវាងចំនួនពិត a , $a \neq 0$ នឹង i ដែល i ហៅថាឯកតានិម្មិត និង $i^2 = -1$ ។

ឧទាហរណ៍ ១

ចំនួនដូចជា $2i, -7i, \frac{5}{2}i, \sqrt{3}i, \pi i, ei...$ ជា ចំនួននិម្មិត ។

២.២ ឫសការេនៃចំនួនអវិជ្ជមាន

លក្ខណៈ: ១

បើ $a > 0$ នោះ $\sqrt{-a} = \sqrt{a(-1)} = \sqrt{ai^2} = \sqrt{a}i$ ។

ឧទាហរណ៍ ២

ចូរបញ្ចេញតម្លៃលេខពីឫសការេដូចខាងក្រោម៖

១ $\sqrt{-40}$ ២ $\sqrt{-45}$ ៣ $\sqrt{-68}$

ដំណោះស្រាយ៖ បញ្ចេញតម្លៃលេខពីឫសការេដូចខាងក្រោម៖

១ $$\begin{aligned}\sqrt{-40} &= \sqrt{40(-1)}\\ &= \sqrt{4\times 10i^2}\\ &= \sqrt{(2i)^2 10}\\ &= 2i\sqrt{10}\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{\sqrt{-40} = 2i\sqrt{10}}$

២ $$\begin{aligned}\sqrt{-45} &= \sqrt{45(-1)}\\ &= \sqrt{45i^2}\\ &= \sqrt{9\times 5i}\\ &= 3i\sqrt{5}\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{\sqrt{-45} = 3i\sqrt{5}}$

៣ $$\begin{aligned}\sqrt{-68} &= \sqrt{68i^2}\\ &= \sqrt{4\times 17i}\\ &= 2\sqrt{17i}\\ &= 2i\sqrt{17}\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{\sqrt{-68} = 2i\sqrt{17}}$

លក្ខណៈ: ២

បើ $x^2 = -a; (a > 0)$ នោះ $x = i\sqrt{a}$ និង $x = -i\sqrt{a}$ ។ តម្លៃនៃអញ្ញាត x ហៅថា ឫសរបស់សមីការ $x^2 = -a$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

- ចំពោះ $x = i\sqrt{a}$ នោះ $x^2 = (i\sqrt{a})^2 = i^2(\sqrt{a})^2 = -a$ ផ្ទៀងផ្ទាត់
- ចំពោះ $x = -i\sqrt{a}$ នោះ $x^2 = (-i\sqrt{a})^2 = i^2(\sqrt{a})^2 = -a$ ផ្ទៀងផ្ទាត់

ឧទាហរណ៍ ៣

ចូរដោះស្រាយសមីការដូចខាងក្រោម៖

១ $x^2 = -12$ ២ $x^2 = -136$ ៣ $x^2 = -225$

ដំណោះស្រាយ៖ ដោះស្រាយសមីការដូចខាងក្រោម៖

១ $x^2 = -12 \iff x^2 = 12i^2$

$$\implies x = \pm\sqrt{12i^2}$$

$$= \pm\sqrt{4\times 3}i$$

$$= \pm 2i\sqrt{3}$$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ឫសនៃសមីការ } x^2 = -12 \text{ គឺ } x = \pm 2i\sqrt{3}}$

២ $x^2 = -136 \iff x^2 = 136i^2$

$$\implies x = \pm\sqrt{136i^2}$$

$$= \pm\sqrt{4\times 34}i$$

$$= \pm 2i\sqrt{34}$$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ឫសនៃសមីការ } x^2 = -136 \text{ គឺ } x = \pm 2i\sqrt{34}}$

៣ $x^2 = -225 \iff x^2 = 225i^2$

$$\implies x = \pm\sqrt{225i^2}$$

$$= \pm\sqrt{9\times 25}i$$

$$= \pm\sqrt{9}\times\sqrt{25}i$$

$$= \pm 3\times 5i$$

$$= \pm 15i$$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ឫសនៃសមីការ } x^2 = -225 \text{ គឺ } x = \pm 15i}$

២.៣ និយមន័យចំនួនកុំផ្លិច

និយមន័យ ២.៣.១ ចំនួនកុំផ្លិច គឺជាចំនួនមួយដែលគេកំណត់សរសេរជាទម្រង់ $z=a+bi$, $(a,b\in\mathbb{R})$, i ជាឯកតានិម្មិត។ ទម្រង់ $z=a+bi$ ហៅថា ចំនួនកុំផ្លិចទម្រង់ពីជគណិត ដែល a ហៅថា ផ្នែកពិត (Real Part) តាងដោយ $Re(z)$ និង b ហៅថា ផ្នែកនិម្មិត (Imaginary Part) តាងដោយ $Im(z)$ ។

ឧទាហរណ៍ ៤

១ $z=0+0i$ ដែល 0 ជាផ្នែកពិត ឬ $Re(z)=0$, 0 ជាផ្នែកនិម្មិត ឬ $Im(z)=0$

២ $z=2+5i$ ដែល 2 ជាផ្នែកពិត ឬ $Re(z)=2$, 5 ជាផ្នែកនិម្មិត ឬ $Im(z)=5$

៣ $z=7-4i$ ដែល 7 ជាផ្នែកពិត ឬ $Re(z)=7$, -4 ជាផ្នែកនិម្មិត ឬ $Im(z)=-4$

៤ $z=-i+3$, 3 ជាផ្នែកពិត ឬ $Re(z)=3$, -1 ជាផ្នែកនិម្មិត ឬ $Im(z)=-1$

២.៤ ឯកលក្ខណៈភាពសំខាន់ៗក្នុង $\mathbb{R}$ ហើយអនុវត្តន៍ក្នុង $(\mathbb{C})$

លក្ខណៈ: ៣

ចំពោះ $\forall z, z_1$ និង $z_2\in\mathbb{C}$ និង $m,n\in\mathbb{R}$៖

- $z^m\cdot z^n=z^{m+n}$
- $(z^m)^n=z^{m\cdot n}$
- $\dfrac{z^m}{z^n}=z^{m-n}$
- $(z_1\cdot z_2)^m=z_1^m\cdot z_2^m$
- $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^m=\dfrac{z_1^m}{z_2^m}$
- $(z_1\pm z_2)^2=z_1^2\pm 2z_1\cdot z_2+z_2^2$
- $(z_1+z_2)(z_1-z_2)=z_1^2-z_2^2$
- $(z_1+z_2)^2-2z_1\cdot z_2=z_1^2+z_2^2$
- $(a\pm bi)^2=a^2\pm 2a\cdot bi-b^2$
- $(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$, $(a,b\in\mathbb{R})$

> ! Caspar Wessel (1745-1818) ជាអ្នកប្រាជ្ញដែលកំណត់សរសេរទម្រង់ $z = a + bi$ មុនដំបូងគេ ហើយប្រកាសឱ្យពិភពលោកប្រើប្រាស់នៅឆ្នាំ 1799។

២.៥ ប្រមាណវិធី និង ការគណនាក្នុង ($\mathbb{C}$)

លក្ខណៈ: ៤

ចំពោះ $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ គេបានលក្ខណៈដូចខាងក្រោម៖

- $z_1 + z_2 \in \mathbb{C}$ និង $z_2 \cdot z_1 \in \mathbb{C}$, លក្ខណៈស្ទាប (Clouser Law) ។
- $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$, ផលបូកមានលក្ខណៈត្រលប់ (Commutative Law of Additive) ។
- $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$, លក្ខណៈផ្តុំនៃប្រមាណវិធីបូក (Associative Law of Additive) ។
- $z_1 + 0 = 0 + z_1 = z_1$, ធាតុណឺតនៃប្រមាណវិធីបូក (Additive Identity) ។
- $z_1 + (-z_1) = (-z_1) + z_1 = 0$, ផលបូកចម្រាស (Additive Inverse) ។
- $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$, លក្ខណៈត្រលប់នៃប្រមាណវិធីគុណ (Commutative Law of Multiplicative) ។
- $z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 \cdot$, លក្ខណៈផ្តុំនៃប្រមាណវិធីគុណ (Associative Law of Multiplicative) ។
- $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$, លក្ខណៈបំបែក (Distributive Law) ។
- $z_1 \cdot 1 = z_1$, ធាតុណឺតនៃប្រមាណវិធីគុណ (Multiplicative Identity) ។
- $z_1 \cdot z_1^{-1} = z_1^{-1} \cdot z_1 = z_1 \cdot \dfrac{1}{z_1} = 1$, ផលគុណចម្រាស (Multiplicative Inverse) ។
- គ្រប់ចំនួនកុំផ្លិចមិនសូន្យ $z_1 = x + yi$ មានចំនួនកុំផ្លិចច្រាសតាងដោយ $\dfrac{1}{z_1}$ ដែល $\dfrac{1}{z_1} = \dfrac{x}{x^2 + y^2} - i\dfrac{y}{x^2 + y^2}$ ។

២.៦ ប្រមាណវិធីលើចំនួនកុំផ្លិច

វិធីបូក និងវិធីដកចំនួនកុំផ្លិច

ដើម្បីបូកនិងដកចំនួនកុំផ្លិច យើងត្រូវបូកឬដកផ្នែកពិតនឹងផ្នែកពិត និងបូក ឬដកផ្នែកនិម្មិតនឹងផ្នែកនិម្មិត ។ បើគេមានចំនួនកុំផ្លិចពីរ $z_1 = a + bi$ និង $z_2 = c + di$ គេបាន៖

១ វិធីបូកចំនួនកុំផ្លិច (Addition)

គេបាន $z_1 + z_2 = a + bi + c + di$

$$= (a + c) + (b + d)i$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i}$

២ វិធីដកចំនួនកុំផ្លិច (Subtraction)

គេបាន $z_1 - z_2 = a + bi - c - di$

$$= (a - c) + (b - d)i$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)i}$

ឧទាហរណ៍ ៤

គេមានចំនួនកុំផ្លិចពីរ $z_1 = 2 + 7i$ និង $z_2 = 4 - 5i$ ។ ចូរគណនាប្រមាណវិធីនៃចំនួនកុំផ្លិចដូចខាងក្រោម៖

១ $z_1 + z_2$ ២ $z_2 - z_1$

ដំណោះស្រាយ៖ គណនាប្រមាណវិធីនៃចំនួនកុំផ្លិចដូចខាងក្រោម៖

គេមាន $z_1 = 2 + 7i$ និង $z_2 = 4 - 5i$

១ គេបាន $z_1 + z_2 = (2 + 7i) + (4 - 5i)$

$$= 2 + 4 + 7i - 5i$$

$$= 6 + 2i$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{z_1 + z_2 = 6 + 2i}$

២ គេបាន $z_2 - z_1 = (4-5i)-(2+7i)$

$$= 4-2-5i-7i$$

$$= 2-12i$$

ដូចនេះ: $\boxed{z_2 - z_1 = 2-12i}$

វិធីគុណចំនួនកុំផ្លិច

គេមានចំនួនកុំផ្លិចពីរ $z_1 = a+bi$ និង $z_2 = c+di$ នោះ:

គេបាន $z_1 \cdot z_2 = (a+bi)(c+di)$

$$= ac+adi+bci+bdi^2$$

$$= (ac-bd)+(ad+bc)i$$

ដូចនេះ: $\boxed{z_1 \cdot z_2 = (ac-bd)+(ad+bc)i}$

ឧទាហរណ៍ ៦

ចូរគណនាប្រមាណវិធីគុណនៃចំនួនកុំផ្លិច ដែលគេឱ្យ $z_1 = 1+i, z_2 = 3-2i$ និង $z_3 = i-3$ ។

១ $z_1 \cdot z_2$ ២ $z_2 \cdot z_3$ ៣ $z_1 \cdot z_3$

ដំណោះស្រាយ៖ គណនាប្រមាណវិធីគុណនៃចំនួនកុំផ្លិចដូចខាងក្រោម៖

គេមាន $z_1 = 1+i, z_2 = 3-2i$ និង $z_3 = i-3$

១ $z_1 \cdot z_2$

គេបាន $z_1 \cdot z_2 = (1+i)(3-2i)$

$$= 3-2i+3i-2i^2$$

$$= 5+i$$

ដូចនេះ: $\boxed{z_1 \cdot z_2 = 5+i}$

២ $z_2 \cdot z_3$

គេបាន $z_2 \cdot z_3 = (3-2i)(i-3)$

$= (3-2i)(-3+i)$

$= -9+3i+6i-2i^2$

$= -7+9i$

ដូចនេះ $\boxed{z_1 \cdot z_2 = -7+9i}$

៣ $z_1 \cdot z_3$

គេបាន $z_1 \cdot z_3 = (1+i)(i-3)$

$= (1+i)(-3+i)$

$= -3+i-3i+i^2$

$= -4-2i$

ដូចនេះ $\boxed{z_1 \cdot z_3 = -4-2i}$

វិធីចែកចំនួនកុំផ្លិច

ដើម្បីចែកចំនួនកុំផ្លិច គេត្រូវគុណភាគយក និងភាគបែង នឹងចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់នៃភាគបែង (ចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់សិក្សាចំណុចបន្ទាប់) ។ គេមាន $z_1 = a+bi$ និង $z_2 = c+di$

គេបាន ៖ $\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}$

$= \frac{ac-adi+bci-bdi^2}{c^2-d^2i^2}$

$= \frac{ac+bd-adi+bci}{c^2+d^2}$

$= \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{-ad+bc}{c^2+d^2}i$

ដូចនេះ $\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i}$